

Est autorisé:
Calculatrice Programmable

Partiel
Analyse numérique matricielle - CSC104

1. (4pts) Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne si $A^* = A$ et antihermitienne si $A^* = -A$. Montrer que:

- (a) Les éléments diagonaux d'une matrice hermitienne sont des réels tandis que ceux d'une matrice antihermitienne sont des imaginaires purs.
- (b) Si une matrice triangulaire est hermitienne ou antihermitienne, elle est diagonale.

2. (8pts) On rappelle que toute matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme la somme d'une matrice symétrique $B = \frac{1}{2}(A + {}^t A)$ et d'une matrice antisymétrique $C = \frac{1}{2}(A - {}^t A)$

$$A = B + C$$

- (a) Montrer qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si sa partie symétrique B est définie positive.
- (b) Soit $A = \text{tridiag}(c, a, b) \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A vérifie les conditions de factorisation LU . Calculer le nombre d'opérations nécessaire à cette factorisation.
- (c) On suppose que $b > 0$ et on rappelle que les valeurs propres d'une matrice $\text{tridiag}(b, a, b)$ sont $\lambda_i = a + 2b \cos \frac{i\pi}{n+1}$. Quelles conditions faut-il imposer à a, b, c pour que la matrice A admette une factorisation de Cholesky? Calculer dans ce cas le nombre d'opérations nécessaire pour une telle factorisation.

3. (8pts) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 12 & 16 \\ 3 & 12 & 27 & 30 \\ 4 & 16 & 30 & 37 \end{pmatrix}$$

Donner la factorisation de Cholesky de A en déduire le déterminant de A . Proposer un critère pour arrêter la méthode de cholesky si la matrice n'est pas définie positive.